Μάθημα 15ο

• Λογισμός Μεταβολών

Το βασικό πρόβλημα που θα λύσουμε είναι να βρούμε τη συνάρτηση $y=y(x)$ ώστε το ολοκλήρωμα

$J=\int_{x_1}^{x_2} f(y,y',x)\,dx$, όπου $f$ μία συνάρτηση του $y$, της παραγώγου $y'=\frac{dy}{dx}$ και της ανεξάρτητης μεταβλητής $x$, ώστε αυτό το ολοκλήρωμα να είναι ακρότατο, μέγιστο ή ελάχιστο.

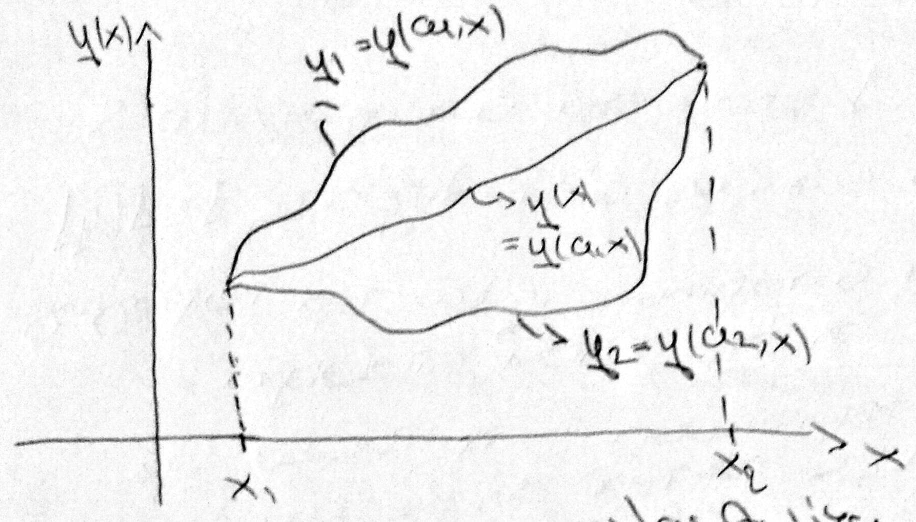
Το ολοκλήρωμα $J$ είναι ένα συναρτησοειδές (functional) και συνήθως συμβολίζεται $J=J[y]$. Εξαρτάται από τη συνάρτηση $y$ και την παράγωγό της αφού τα όρια $x_1, x_2$ είναι σταθερά. Στη γενικότερη περίπτωση το πρόβλημα θα ζητάει τις τιμές των $x_1, x_2$ και τη συνάρτηση $y(x)$ για την οποία το ολοκλήρωμα $J$ παρουσιάζει ακρότατο.

Ας υποθέσουμε ότι ζητάμε τη συνάρτηση $y=y(x)$ για την οποία το $J[y]=\int_{x_1}^{x_2} f\,dx$ είναι ακρότατο και έστω ότι ελαχιστοποιεί την τιμή του συναρτησοειδούς. Δηλαδή κάθε άλλη $y(x)$ αν αντικατασταθεί στο ολοκλήρωμα θα δώσει τιμή μεγαλύτερη.

Γράφουμε την $y$ ως $y(\alpha,x)$ μία οικογένεια συναρτήσεων και η ελάχιστη τιμή του $J$ δίνεται για

$y(\alpha,x) = y(x) = y(0,x)$.

Δηλαδή, για τις διάφορες τιμές του $\alpha$, υπάρχει μία συνάρτηση που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη τιμή του $J$. Το $J$ ελαχιστοποιείται για $\alpha=0$.
Δηλαδή μεταβάλλοντας τις τιμές του $\alpha$ βρίσκουμε την βέλτιστη (μη ελάχιστη εδώ περ.) τιμή του $J$.




μας θυμίζει Taylor

Γράφω την $y(\alpha,x) = y(0,x) + \alpha\eta(x)$, όπου η συνάρτηση $\eta=\eta(x)$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[x_1,x_2]$

Δηλαδή η $y=y(\alpha,x)$ είναι η οικογένεια των συναρτήσεων που μεταβάλλονται/διαφοροποιούνται από την $y(x)$ κατά $\alpha$.

Άρα, λοιπόν ζητώ μία συνθήκη που θα ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα χωρίς να χρειαστεί να το υπολογίσω για όλες τις τιμές του $\alpha$

Η συνάρτηση $\eta(x)$ επίσης ικανοποιεί κάποιες συνθήκες
$y(a,x) = y(0,x) + a\eta(x)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} y(a,x_1) = y(0,x_1) + a\eta(x_1) \\ y(a,x_2) = y(0,x_2) + a\eta(x_2) \end{cases}$$

Όμως $\begin{cases} y(a,x_1) = y(0,x_1) \\ y(a,x_2) = y(0,x_2) \end{cases}$ διότι όλες οι συναρτήσεις

της οικογένειας $y(a,x)$ διέρχονται από τα $x_1, x_2$

Τότε προκύπτει: $\begin{cases} \eta(x_1) = 0 \\ \eta(x_2) = 0 \end{cases}$

Άρα, το πρόβλημα που ανάγεται να λύσω:

- $J[y] = J(a) = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(a,x), y'(a,x), x\}\, dx$ να

ακρότατο (ελάχιστο) στο $a=0$.

Μια συνθήκη ακροτάτου επιβάλλει $\left.\frac{dJ}{dx}\right|_{a=0} = 0$
(αναγκαία συνθήκη)

## Παράδειγμα

Θεωρώ $f(y,y',x)=(y')^2=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ στο $I[y]=\int_{x_1}^{x_2} f(y,y',x)\,dx$. Έστω ότι η λύση του προβλήματος στο $[x_1,x_2]=[0,2\pi]$ είναι η $y=y(x)=x$. Επιλέγω $n(x)=\sin x$. Δηλαδή $y(a,x)=y(0,x)+an(x)=x+a\sin x$.

Πρέπει $n(0)=n(2\pi)=\sin(0)=\sin(2\pi)=0$.

Υπολογίζω το ολοκλήρωμα:

$$f=(y')^2=[1+a\cos x]^2=1+a^2\cos^2 x+2a\cos x$$

$$J=\int_0^{2\pi} f\,dx=\int_0^{2\pi}(1+a^2\cos^2 x+2a\cos x)\,dx=2\pi+a^2\pi.$$

$\cos^2 x=\frac{1+\cos(2x)}{2}$ → το ολοκλήρωμα του κάνει μηδέν γιατί είναι περιοδική συνάρτηση που την ολοκληρώνω στην περίοδό της.

$$\boxed{\begin{aligned}\cos^2 x+\sin^2 x&=1\\ \cos^2 x-\sin^2 x&=\cos(2x)\\ 2\sin x\cos x&=\sin(2x)\end{aligned}}$$

Άρα $J(a)=2\pi+\pi a^2$, προφανώς η ελάχιστη τιμή είναι $J(0)=2\pi$.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

1) Στο παράδειγμα που δόθηκε η λύση $y=y(x)$ και επιλέξαμε τις συναρτήσεις $u=u(x)=\sin x$. Για αυτήν την οικογένεια των λύσεων το συναρτησοειδές ελαχιστοποιείται στο $a=0$. Σκοπός μας είναι να βρίσκουμε τις συναρτήσεις $y=y(x)$ που κάνουν ακρότατο το ολοκλήρωμα, ανεξαρτήτως της συνάρτησης $u(x)$ και της σταθεράς $a$

• <u>Οι εξισώσεις Euler</u>

Το πρόβλημα ανάγεται στη λύση της $\boxed{\left.\dfrac{\partial J}{\partial a}\right|_{a=0}=0}$

με $\boxed{J(a)=\int_{x_1}^{x_2} f(y,y',x)\,dx}$, όπου $\boxed{y(a,x)=y(x)+au(x)}$

$$\boxed{\frac{\partial J}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\int_{x_1}^{x_2} f(y,y',x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial a}\,dx}$$

<u>Θεωρώ ότι η συνάρτηση $f=f(y,y',x)$ ως συνάρτηση των $y,y',x$</u> έχει τις αντίστοιχες παραγώγους.

<u>Τότε:</u>

(γιατί $x$ ανεξ. του $a$)

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial x}\cancelto{0}{\frac{\partial x}{\partial a}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = u(x)$$

$$y'(a,x) = \frac{dy}{dx} = y'(x) + a u'(x)$$

άρα $\frac{\partial y'}{\partial a} = u'(x)$. Συνεπώς λοιπόν:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = u(x)\frac{\partial f}{\partial y} + u'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}$$

Αντικαθιστώ στο ολοκλήρωμα:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial a}\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\left[u(x)\frac{\partial f}{\partial y} + u'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right]dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} u(x)\frac{\partial f}{\partial y}\,dx + \int_{x_1}^{x_2} u'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\,dx$$

Υπολογίζω το δεύτερο ολοκλήρωμα με παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int_{x_1}^{x_2} u'\frac{\partial f}{\partial y'}\,dx = u\frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} u\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx$$

Όμως $u(x_1) = u(x_2) = 0$, άρα

$$\int_{x_1}^{x_2} u'\frac{\partial f}{\partial y'}\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} u\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\,dx$$

## Συνολικά:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_{x_1}^{x_2} u(x)\frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_{x_1}^{x_2} u(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$

Για $a=0$:

- $$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} u(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx = 0$$

Ισχύει $\forall\, u(x)$, άρα μια αναγκαία συνθήκη είναι

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$ Εξίσωση Euler

-

## Παρατήρηση

Πώς γράφεται η εξίσωση:

Ο πρώτος όρος είναι η παράγωγος ως προς τη ζητούμενη συνάρτηση. Ο δεύτερος όρος είναι η ολική παράγωγος της ανεξάρτητης μεταβλητής και παράγωγος ως προς τη παράγωγο της ζητούμενης συνάρτησης

## Παράδειγμα

Να βρεθεί η συνάρτηση για την οποία το συναρτησοειδές $I[y]=\int_0^{2\pi}(y')^2dx$ ελαχιστοποιείται.

### Λύση

$$f(y,y',x)=(y')^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y'}=2y'$$

Δηλαδή:

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}=0 \Rightarrow 0-\frac{d}{dx}(2y')=0$$

$$\Rightarrow \boxed{-2y''=0} \quad \Rightarrow \boxed{y=c_1x+c_2}$$

$$\begin{cases} y(0)=0 \Rightarrow \boxed{c_2=0} \\ y(1)=1 \Rightarrow \boxed{c_1=1} \end{cases}$$

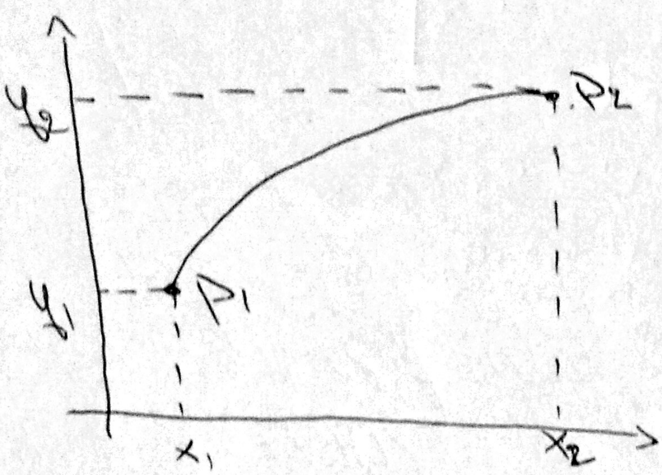
Άρα $y=y(x)=x$

→ Δίνονται με το πρόβλημα

## Παράδειγμα

Ν.δ.ο η συντομότερη απόσταση στον $\mathbb{R}^2$ μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία.

### Λύση




Το μήκος τόξου της καμπύλης είναι

$$S=\int_{P_1}^{P_2} ds=\int_{P_1}^{P_2}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{\sqrt{1+(y')^2}\,dx}_{f(y,y',x)}$$

**Η ερώτηση είναι:**

Ν.β. η συνάρτηση $y=y(x)$ ώστε το συναρτησοειδές $S=S[y]$ να είναι ελάχιστο.

$$f=\sqrt{1+(y')^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

Από την εξίσωση Euler: $\dfrac{\partial f}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y'}=0$

$$\Rightarrow 0-\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=c \text{ (σταθερή)}$$

$$\Rightarrow \frac{(y')^2}{1+(y')^2} = c^2 \Rightarrow (y')^2 = c^2 + c^2 (y')^2 \Rightarrow (y')^2 = \frac{c^2}{1-c^2} = c_1$$

$$\Rightarrow (y') = \pm\sqrt{c_1} = c_2 \Rightarrow \boxed{y = c_2 x + c_3}$$

Θα υπολογίσω τις σταθερές $c_2, c_3$ από τις συνθήκες: $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$

Ερώτηση (για σπίτι)

Να εξετάσετε την περίπτωση $\boxed{1 - c^2 = 0}$

Παράδειγμα:

Το πρόβλημα του βραχυστόχρονου.

Ένα υλικό σημείο κινείται κάτω από την επίδραση σταθερού πεδίου ξεκινώντας από ηρεμία στο σημείο $(x_1, y_1)$. Μεταβαίνει σε χαμηλότερο σημείο $(x_2, y_2)$. Ν.β. η τροχιά που πρέπει να ακολουθήσει για να φτάσει στον ελάχιστο δυνατό χρόνο.